几何画板的四种功能在两个重要极限教学中的应用

王 波，杨 耘，张 文

（咸阳职业技术学院，陕西 咸阳 712046）

摘 要：几何画板是一款优秀的数学学科教学软件，在反映几何图形元素变化规律和描述数与形动态关系方面具有独特的作用。本文简要阐述了几何画板四种功能在两个重要极限教学中的应用。

关键词：几何画板；高等数学；两个重要极限

中图分类号：O1-0 **文献标志码**：A **文章编号**：94047-（2013）03-059-04

目前，高等数学教材中配备的数学软件有Mathmatica、Matlab、Maple等，这些软件偏重于工程技术计算，操作性不强，直观性较差，要实现某个过程，需要编程，这对非数学和计算机专业的学生来说，使用起来有一定的困难。几何画板软件犹如电子文具盒，不需要编程，在创设问题情景、反映图形运动变化、呈现数量关系方面有着独到的作用，是一款适合高等数学教学的工具性软件。

几何画板软件和标准的Windows窗口一样，界面上有菜单栏和工具栏，通过画点、线、圆工具和构造、变换、度量、数据、绘图等菜单栏，可以实现一系列功能，促成“数”与“形”结合，完成极限教学图形和数据方面的直观表达。下面，我们以两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 为例，就几何画板5.05的函数功能、动画功能、计算功能和迭代功能予以说明。

1 函数功能

对于任何形如 $y=f(x)$ 的函数，用几何画板软件都可以快速准确地作出函数图象。利用函数图象的直观性，观察变化趋势，认识极限过程，加深对极限思想的理解。

我们在同一个坐标系下画 $y=\frac{\sin x}{x}$ 和 $y=(1+\frac{1}{x})^x$ 的图象。方法是使用“绘图”→“绘制新函数”命令，在弹出的对话框中，直接输入函数解析式，然后点确定即可，图1。

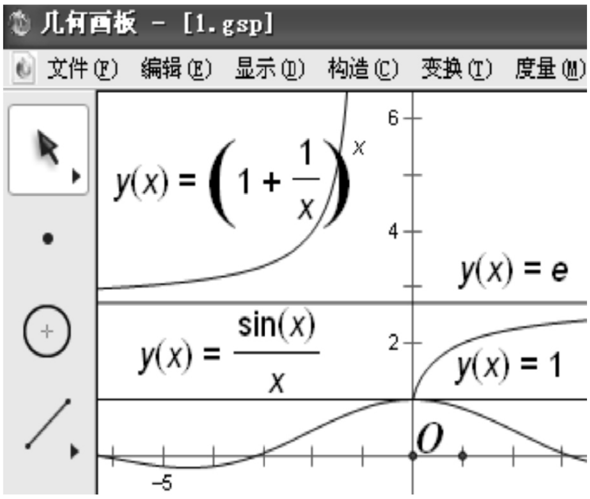

图1 $y=\frac{\sin x}{x}$ 、$y=(1+\frac{1}{x})^x$ 的图象

收稿日期：2013-02-23
基金项目：咸阳职业技术学院科研基金项目（编号：2013KYB18）。
作者简介：王波（1962—），男，陕西乾县人，副教授，咸阳职业技术学院职业教育研究所所长。主要研究方向为职业教育与教学及数学软件应用。

对于$y=\dfrac{\sin x}{x}$，观察当$x\to 0$时函数的变化趋势：当x取正值趋近于0时，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$，即$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$；当$x$取负值趋近于0时，$-x\to 0$，$-x>0$，$\sin(-x)>0$，于是，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=$ $\lim\limits_{-x\to 0^+}\dfrac{\sin(-x)}{(-x)}=1$。因此，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

对于$y=(1+\dfrac{1}{x})^x$，观察当$x\to\infty$时函数的变化趋势：当x取正值并逐渐增大时，$(1+\dfrac{1}{x})^x$逐渐增大，但是无论x如何大，$(1+\dfrac{1}{x})^x$的值总不会超过e，当$x\to+\infty$时，$(1+\dfrac{1}{x})^x$逐渐趋近于一个确定的无理数e=2.7182818…。当x取负值且绝对值无限增大时，函数$(1+\dfrac{1}{x})^x$有类似的变化趋势，只是它逐渐减小而趋向于e。因此，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$。

在高职院校的高等数学教学中，直接运用函数的图象进行验证，用图形的观察代替证明，符合学生的认知水平，也体现淡化理论突出应用的教学理念。如果需要用夹逼定理来证明，也可通过图象帮助学生理解变化过程，形成证明思路，理解起来就容易得多了。

2 动画功能

学生在学习高等数学中最大的困难是无法感知变化过程，由于受语言描述和黑板作图的限制，变化过程往往“只可意会，不可言传”。利用几何画板的动画功能进行实验演示，实现极限变化过程的可视化，将抽象问题转化为让学生看得见的动态图象。

对于函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$，画区间[2，2]上的图形，利用几何画板的动画功能来演示当$x\to 0$时函数的变化过程，将变化情况“逐帧放映”，帮助学生形象生动的理解函数的极限。方法为：①使用“绘图”→“在轴上绘制点”→“直角坐标系”，分别输入–2和2，点确定，得到(–2，0)和(2，0)两点；②分别选中两点，使用“构造”→“线段”，得到两点间的线段；③在该线段上任取一点A，并选中该点，使用“度量”→“横坐标”，得到该点的横坐标，并改标签为x，即得到x=–1.23；④使用“数据”→“计算”，计算$\dfrac{\sin x}{x}$的值，即得到$\dfrac{\text{Sin (x)}}{\text{X}}$=0.77；⑤分别选中$x=-1.23$和$\dfrac{\text{Sin (x)}}{\text{X}}$=0.77，使用“绘图”→“绘制点”，得到点（x，$\dfrac{\sin x}{x}$），并标记为B；⑥分别选中A、B点，使用“构造”→“轨迹”，得到函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$在区间[–2，2]上的图象(见图2)。

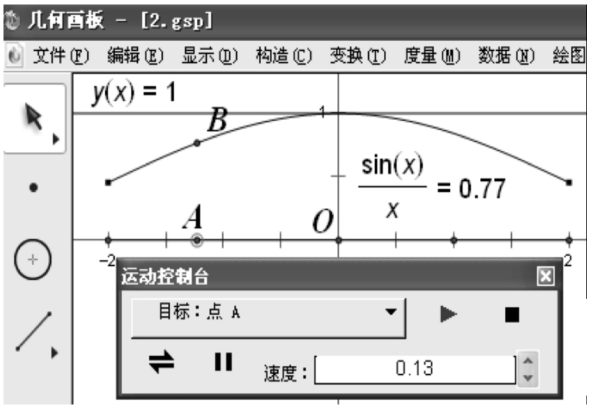

图2 函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$（$-2\leqslant x\leqslant 2$）的图象

⑦选中A点，使用“显示”→“生成点的动画（A）”，A点在[–2，2]上往复运动，B点追踪A点，在曲线上作往复运动。

从图中可以直观地看出，当点A从坐标原点两侧无限趋近于0时，点B与点(0，1)越来越接近，即函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图形无限趋近1，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。对于函数 $y=(1+\dfrac{1}{x})^x$，在 x 轴上任取一点A，过该点作 x 轴的垂线，与 $y=(1+\dfrac{1}{x})^x$、$y=e$ 相交于B、C两点，当点A逐渐远离坐标原点O时，点B与点C逐渐接近，见图3，即函数 $y=(1+\dfrac{1}{x})^x$ 无限趋近于 e，即 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$。

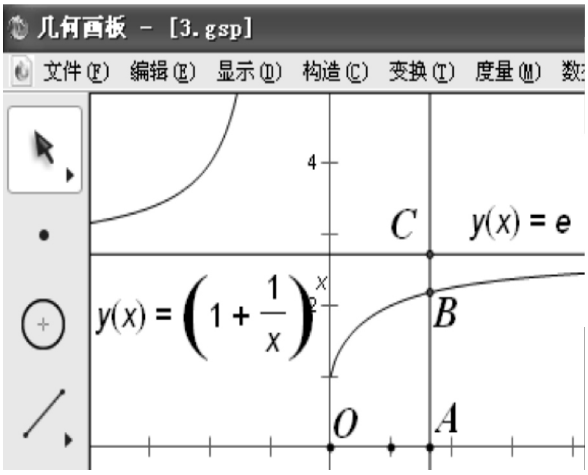

图3 $y=(1+\dfrac{1}{x})^x$ 的图像

3 计算功能

利用几何画板的计算功能，可以实现变化过程数据化，变化趋势具体化，不用太多的语言描述，而用动态数据说话，思维过程完全用按照一定规律排列的数据表达，可使学生深刻地理解变化规律，形成清晰的认知过程。

对于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$，课本中只说明e < 3，直接给出了e= 2.7182818…，学生对此感到茫然。在教学过程中如果借助于几何画板的动态计算功能，呈现随着n的无限增大数列 $x_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的变化情形，让学生观察得出结论，即可消除学生的疑问。

实现步骤是：①使用“编辑”→“参数选项”，在对话框中将“单位”下“其他”的“精确度”设为“十万分之一”；②使用“数据”→“新建参数”，新建参数n=1000；③使用“数据”→“计算”，在对话框中计算 $(1+\dfrac{1}{n})^n$；④选中n，使用“编辑”→“操作类按钮”→“动画”，得到“动画参数”按钮。在对话框中将“方向”选为“增加”，“改变数值”选为“离散”，以“1000”单位“每”秒，范围设为“1000到10000”；⑤选中n和 $(1+\dfrac{1}{n})^n$，使用“数据”→“制表”，得到n和 $(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的关系表格。选中表格，单击“数据”→“添加表中数据”，在对话框中选“当数值改变时添加10个条目”；⑥单击“动画参数”按钮，运行结果见图4。

可以看出，随着n的增大，$(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的值越来越与数2. 7182818…接近，因此，$x_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的极限值就是无理数e=2. 7182818…。

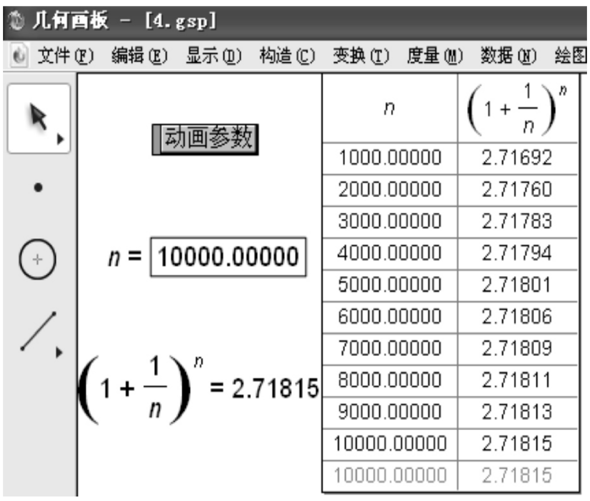

图4 $(1+\dfrac{1}{n})^n$ 的值

对于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ，将几何画板精确度设定为十万分之一，新建参数 $x=1$（或-1），计算 $\dfrac{\sin x}{x}$ ，选中 x ，按键盘上的–（或+）键，使得x逐渐减小（或增大），可以看到在x的连续减小（或增大）过程中，$\dfrac{\sin x}{x}$ 逐渐趋近向于1。

4 迭代功能

不同的迭代深度，对应着极限的不同暂态过程。一个典型的例子是几何画板展现割圆术思想。方法为先创建一个参数，并利用带参数的迭代创建一个圆内接正n边形，通过改变n的值而得到不同边数的正多边形。我们可以利用几何画板测量正多边形的面积。当圆内接正n边形的边数无限增加时，圆内接正n边形的面积无限接近一个确定的数值。

对于数列{ $(1+\dfrac{1}{n})^n$ }的极限，可以先利用几何画板的迭代功能画出数列的图形，观察其变化趋势。步骤是：①使用“图表”→“新建函数”、“新建参数”，新建函数 $y=(1+\dfrac{1}{x})^x$ 和参数；②使用“数据”→“计算”，计算y（n）和n+1的值；③选中n=1和y（n），使用“绘图”→“绘制点”，在坐标系中得到（n，y（n））；④选中n=l，使用“变换”→“迭代”，在“迭代”对话框中作由原象n到初象n+l的迭代；⑤选中迭代的点，单击右键，点属性，在“迭代象”对话框中选“迭代”，并设定迭代次数，图5。

可以看出，随着n的增加，$(1+\dfrac{1}{n})^n$ 越来越与e接近，由此可得当n趋于无穷大时，数列{ $(1+\dfrac{1}{n})^n$ }以e为极限。

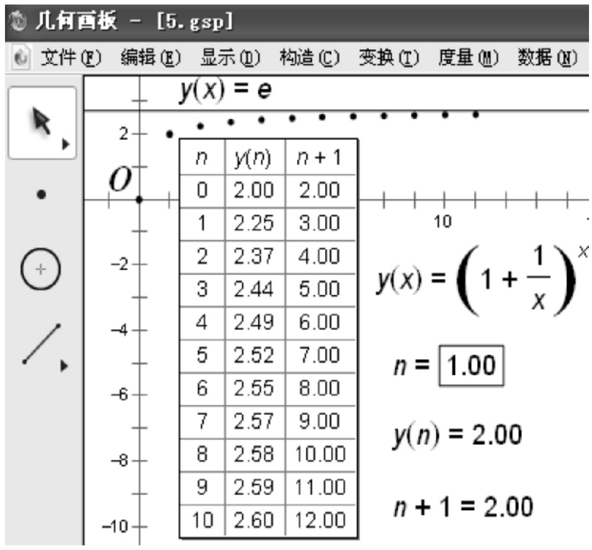

图5 迭代10次的结果

参 考 文 献：

[1] 张景中，葛强，彭翕成.深入数学学科的信息技术[J].电化教育研究，2010年第2期.

[2] 刘同军.几何画板在数学教学中的应用[M].中国石油大学出版社，2005.

（责任编辑、校对：阮班录）

The Application of Four Functions of Geometric Sketchpad in Two Important Limit Teaching

WANG Bo, YANG Yun, ZHANG Wen

（Xianyang Vocational & Technical College, Xianyang Shaanxi 712046）

Abstract: geometric sketchpad is an excellent mathematical teaching software in terms of reflecting geometry element change rule and describing dynamic relationship between numbers and forms. This article briefly expounds the four function application of geometric sketchpad in the two important limit teaching.

Key words: geometric sketchpad；advanced mathematics；two important limits